

Сопряженные задачи для нестационарных задач

Лектор: д.ф.м.н., профессор
Темирбеков Н.М.

Рассмотрим сначала следующую нестационарную задачу:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = f(t, x), 0 < t \leq T, 0 < x < 1, (7.1)$$

$$\varphi(t, 0) = \varphi(t, 1) = 0, \varphi(0, x) = g(x),$$

решение φ задачи (7.1) достаточно гладкое, непрерывно дифференцируемо по t на $[0, T]$ и дважды непрерывно дифференцируемо по x на $[0, 1]$.

Задачу (7.1) - основной или невозмущенной задачей.

$$-\frac{\partial \varphi^*}{\partial t} - \frac{\partial^2 \varphi^*}{\partial x^2} = f^*(t, x), 0 \leq t < T, 0 < x < 1,$$

$$\varphi^*(t, 0) = \varphi^*(t, 1) = 0, \varphi^*(T, x) = g^*(x), (7.2)$$

где функции f^*, g^* пока не определены. Пусть $f^* \in L_2((0, T) \times (0, 1)), g^* \in L_2(0, 1)$.

$$\int_0^T \frac{\partial}{\partial t} \left(\int_0^1 \varphi^* \varphi dx \right) dt + \int_0^T \left[\int_0^1 \left(-\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \varphi^* + \frac{\partial^2 \varphi^*}{\partial x^2} \varphi \right) dx \right] dt = \int_0^T \left[\int_0^1 (f \varphi^* - f^* \varphi) dx \right] dt (7.3)$$

$$\int_0^1 g^*(x) \varphi_T(x) dx - \int_0^1 \varphi_0^*(x) g(x) dx = \int_0^T \left[\int_0^1 (f \varphi^* - f^* \varphi) dx \right] dt, (7.4)$$

Где

$$\varphi_T(x) = \varphi(T, x) = 0, \varphi_0^*(x) = \varphi^*(0, x).$$

$$J = \int_0^1 g^*(x) \varphi_T dx + \int_0^T \left(\int_0^1 f^*(t, x) \varphi(t, x) dx \right) dt, (7.5)$$

где g^*, φ^* - заданные функции.

$$J = \int_0^1 \varphi_0^*(x) g(x) dx + \int_0^T \left(\int_0^1 f(t, x) \varphi^*(t, x) dx \right) dt. (7.6)$$

Пример. Пусть

$$f(t, x) = \sqrt[4]{1 + t^{2/3}e^{-t}} \sin 2\pi x, g(x) = 2\sin \pi x + \sin 3\pi x;$$

Тогда основная задача (7.1) примет вид

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \sqrt[4]{1 + t^{\frac{2}{3}}e^{-t}} \sin 2\pi x, 0 < t \leq T, 0 < x < 1, (7.7)$$

$$\varphi(t, 0) = \varphi(t, 1) = 0, \varphi(0, x) = 2\sin \pi x + \sin 3\pi x.$$

Предположим, что нам требуется вычислить значение не самого решения φ , а функционала от этого решения вида

$$J = \int_0^1 \sin \pi x \varphi(T, x) dx. (7.8)$$

Для вычисления J по формуле (7.8) необходимо знать значение решения $\varphi(t, x)$ задачи (7.7) при $t = T$, которое трудно найти в силу сложного вида функций f и g . Воспользуемся для этого формулой (7.6).

Прежде всего запишем (7.8) в виде (7.5), где нужно положить

$$g^*(x) = \sin \pi x, \varphi^*(t, x) \equiv 0. \quad (7.9)$$

$$-\frac{\partial \varphi^*}{\partial t} - \frac{\partial^2 \varphi^*}{\partial x^2} = 0, 0 \leq t < T, 0 < x < 1, \quad (7.10)$$

$$\varphi^*(t, 0) = \varphi^*(t, 1) = 0, \varphi^*(T, x) = \sin \pi x.$$

$$\varphi^*(t, x) = e^{\pi^2(t-T)} \sin \pi x \quad (7.11)$$

$$J = \int_0^1 e^{-\pi^2 T} \sin \pi x (2 \sin \pi x +$$

Пример. Пусть

$$f(t, x) = (1 + 4\pi^2 t)\sin 2\pi x, g(x) = 0.$$

Тогда основная задача примет вид

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = (1 + 4\pi^2 t)\sin 2\pi x, \quad (7.17)$$

$$\varphi(t, 0) = \varphi(t, 1) = 0, \varphi(0, x) = 0.$$

В качестве функционала J из (7.5) выберем следующий:

$$J = \int_0^1 \sin \pi x \varphi(T, x) dx; \quad (7.18)$$

Здесь

$$g^*(x) = \sin \pi x, f^*(t, x) \equiv 0.$$

решение задачи (7.17); оно имеет вид

$$\varphi(t, x) = t \sin 2\pi x. \quad (7.19)$$

$$J = T \int_0^1 \sin \pi x x \sin 2\pi x dx = 0; \quad (7.20)$$

Возмущенная задача

$$\frac{\partial \varphi'}{\partial t} - \frac{\partial^2 \varphi'}{\partial x^2} = (1 + 4\pi^2 t) \sin 2\pi x, \quad (7.21)$$

$$\varphi'(t, 0) = \varphi'(t, 1) = 0, \quad \varphi'(0, x) = e^{\pi^2 T} \sin^2 \pi x.$$

Нам следует положить $\delta f \equiv 0$, $\delta g = e^{\pi^2 T} \sin \pi x$. Тогда из (7.18) и (7.16) получаем

$$J' = J + \delta J = \delta J = \int_0^1 \varphi^* \delta g dx = \int_0^1 \varphi_0^*(x) e^{\pi^2 T} \sin \pi x dx, \quad (7.22)$$

Где $\varphi_0^*(x) = \varphi^*(0, x)$, а $\varphi^*(t, x)$ - решение сопряженной задачи

$$-\frac{\partial \varphi^*}{\partial t} - \frac{\partial^2 \varphi^*}{\partial x^2} = 0, \quad (7.23)$$

$$\varphi^*(t, 0) = \varphi^*(t, 1) = 0, \quad \varphi^*(T, x) = \sin \pi x.$$

решение

$$\varphi^*(t, x) = e^{\pi^2(t-T)} \sin \pi x. \quad (7.24)$$

$$J' = \int_0^1 e^{-\pi^2 T} \sin \pi x e^{\pi^2 T} \sin \pi x dx = \int_0^1 \sin^2 \pi x dx = \frac{1}{2}. \quad (7.25)$$

Рассмотрим нестационарную задачу вида

$$-\frac{\partial \varphi}{\partial t} + A\varphi = f \text{ в } (0, T] \times \Omega, \quad (7.26)$$

$$\varphi = g, \text{ при } t = 0,$$

Где A – линейный оператор, $\varphi(t, x)$ для каждого t принадлежит некоторому множеству функций $D(A)$ с областью определения $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ ($n \geq 1$). Функции $f(t, x)$, $g(x)$ для каждого $t \in [0, T]$ предположим квадратично суммируемыми по x на Ω принадлежащими вещественному гильбертову пространству $H = L_2(\Omega)$, в котором задано обычное скалярное произведение (\cdot, \cdot) .

$$-\frac{\partial \varphi}{\partial t} + A\varphi = f, \text{ в } (0, T] \times \Omega, \quad (7.26)$$

$$\varphi = g, \text{ при } t = 0,$$

Где A – линейный оператор, $\varphi(t, x)$ для каждого t принадлежит некоторому множеству функций $D(A)$ с областью определения $\Omega \subset R^n$ ($n \geq 1$). Функции $f(t, x), g(x)$ для каждого $t \in (0, T]$ предположим квадратично суммируемыми по x на Ω принадлежащими вещественному гильбертову пространству $H = L_2(\Omega)$, в котором задано обычное скалярное произведение (\cdot, \cdot) .

сопряжённая задача вида

$$-\frac{\partial \varphi^*}{\partial t} + A^* \varphi^* = f^*, \text{ в } (0, T] \times \Omega, (7.27)$$

$$\varphi^* = g^*, \text{ при } t = T,$$

Где функции f^*, g^* пока не определены, A^* -оператор, сопряженный к A , удовлетворяющий для каждого t тождеству Лагранжа

$$(A\varphi, \varphi^*) = (\varphi, A^*\varphi^*), \varphi \in D(A), \varphi^* \in D(A^*). \quad (7.28)$$

$$\int_0^T \frac{\partial}{\partial t} (\varphi^*, \varphi) dt + \int_0^T [(A\varphi, \varphi^*) - (\varphi, A^*\varphi^*)] dt = \int_0^T [(f, \varphi^*) - (f^*, \varphi^*)] dt. \quad (7.29)$$

$$(g, \varphi_T) - (g, \varphi_0^*) = \int_0^T [(f, \varphi^*) - (f^*, \varphi)] dt, \quad (7.30)$$

Где

$$\varphi_T = \varphi(T, x), \varphi_0^* = \varphi^*(0, x).$$

$$J = (g^*, \varphi_T) + \int_0^T (f^*, \varphi) dt, \quad (7.31)$$

Где f^*, g^* - некоторые заданные функции. Используя соотношение (7.30), мы можем получить другую формулу для вычисления. Из (7.30), (7.31) имеем

$$J = (g, \varphi_0^*) + \int_0^T (f, \varphi^*) dt, \quad (7.32)$$

$$f' = f + \delta f, g' = g + \delta g.$$

возмущенная задача:

$$\frac{\partial \varphi'}{\partial t} + A\varphi' = f' \text{ в } (0, T] \times \Omega, \quad (7.33)$$

$$\varphi' = g', \text{ при } t = 0$$

$$\varphi'(t, x) = \varphi(t, x) + \delta\varphi(t, x).$$

$$J' = J + \delta J, \quad (7.34)$$

Где

$$\delta J = (\delta g, \varphi_0^*) + \int_0^T (\delta f, \varphi^*) dt \quad (7.35)$$

Или, с другой стороны,

$$\delta J = (g^*, \delta\varphi_T) + \int_0^T (f^*, \delta\varphi) dt \quad (7.36)$$

$$\delta J = (\delta g, \varphi_0^*) + \int_0^T (\delta f, \varphi^*) dt + \int_0^T (\delta A\varphi', \varphi^*) dt \quad (7.37)$$

$$\delta J = (\delta g, \varphi_0^*) + \int_0^T (\delta f, \varphi^*) dt - \int_0^T (\delta A\varphi, \varphi^*) dt \quad (7.38)$$

Список литературы:

1.Марчук Г.И. Сопряженные уравнения: Курс лекций.-М.:ИВМ РАН, 2000. – 175 с.